

Técnicas Experimentales I

Laboratorio Básico

Práctica 4:

Momento de Inercia

Pedro Martínez Caamaño

1• Objetivos

Aplicando la teoría conocida del concepto de momento de inercia, asociado a los cuerpos físicos en el que se mide la distribución de masa a través del eje en el que rote. Como ya sabemos, el momento de inercia depende de la masa del cuerpo, la distribución de esta en su figura y la geometría asociada a tal, así como el punto desde el cual evaluemos. En esta práctica, sin embargo, usaremos elementos a evaluar con densidad uniforme y figuras de geometría sencilla.

Dividiremos la práctica en tres partes, acorde a objetivos diferentes, pero todos del mismo tema:

- 1) Hallar la constante del resorte (muelle) que nos dará la periodicidad de rotación de los elementos situados sobre el soporte que el muelle gobierna.
- 2) Calcular y comparar el momento de inercia teórico y experimental de dos objetos, un cilindro hueco de paredes no despreciables y una esfera rígida en nuestro caso.
- 3) Verificar el Teorema de Steiner en dos objetos, una barra sólida y un disco, variando la distancia al centro de masas.

Como objetivos indirectos, destaca el habituarse al material y disciplina de trabajo de laboratorio, así como el uso de elementos nuevos (en nuestro caso el cronómetro automático).

2• Material

Los materiales que utilizaremos, cuyas propiedades (masa o dimensiones) trataremos en sus respectivos apartados, serán los siguientes:

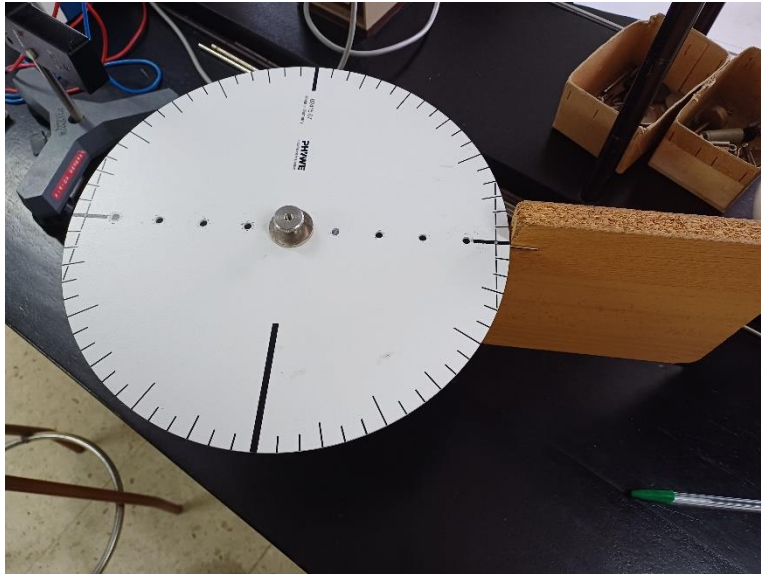
- Soporte giratorio con un muelle de torsión.
- Balanza de precisión.
- Cronómetro automático con sensor fotoeléctrico.
- Regla de medir.
- Elementos auxiliares (no fundamentales pero que ayudarán en la toma de medidas, como las dos tablas de madera para medir distancia en objetos o los plásticos huecos para tarar en la balanza).
- Dinamómetro.
- Disco perforado (con marcas señalando los ángulos), barra de metal (con marcas señalando distancias), esfera sólida y cilindro hueco. Estos, salvo la barra de metal, poseen unos salientes metálicos que serán detectados por el sensor fotoeléctrico.

3• Procedimiento

Al igual que dividimos los objetivos en tres, también su procedimiento, buscando cada parte su respectivo objetivo ya mencionado.

Parte 1

Para hallar la constante del muelle, prepararemos el soporte (con el muelle) al que colocaremos el disco perforado por su centro geométrico y, respecto a un punto neutro de referencia, el de reposo del muelle, pero medido por el pitorro metálico que sobresale, en el que colocaremos una tabla de madera, tomaremos medidas.



Uso de la tabla de madera para centrar el disco.

Estas medidas serán hechas a intervalos regulares de ángulos y tomadas por el dinamómetro en su vector tangencial (del pitorro) con una distancia conocida al centro del disco (que, para ángulos pequeños y por tanto fuerzas pequeñas, será mayor ya que el propio dinamómetro hacia contacto con el disco y no permitía estar de forma totalmente tangencial a este). El principio se basa en la ecuación:

$$M_F = -D \cdot \Phi$$

Y en

$$M_F = F \cdot r$$

Por lo que:

$$D = -\frac{F \cdot r}{\Phi}$$

Siendo D la constante del muelle, F la fuerza lineal aplicada, r la distancia al centro, Φ el ángulo y M_F el momento de la fuerza.

Para esta primera parte, cabe destacar que el disco posee 72 muescas, es decir, una muesca cada 5° , pero siendo el tamaño de esta muesca incluso inferior a 1° . Es por ello que la incertidumbre que tomaremos será de 1° y no de 5° porque creemos que es perfectamente viable y por ello lo comentamos.

Tras la toma de medidas, dispondremos los puntos de forma gráfica de M frente al ángulo en radianes y haremos una regresión lineal que nos dará el valor de la constante.

Parte 2

Ahora, con el valor de D, calcularemos el momento de inercia de dos cuerpos: la esfera rígida y el cilindro hueco. Para ello tomaremos medidas de su semiperíodo al girar respecto a sus ejes a una distancia aproximada del reposo de 90°. También los pesaremos y encontraremos sus momentos de inercia aplicando:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}}$$

$$T_{1/2} = \frac{T}{2} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}}$$

Donde T es el período de rotación, $T_{1/2}$ el semiperíodo, I el momento de inercia y D la constante del muelle. Así es que tendríamos:

$$I = D \cdot \frac{T_{1/2}^2}{\pi^2}$$

Que compararemos con los asociados a su geometría teórica:

Figura	Momento de Inercia (Kg*m ²)
Cilindro hueco	$I = \frac{m}{2} \cdot (R_1^2 + R_2^2)$
Esfera	$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$

Donde m representa la masa total del objeto y R el radio de tal o el radio a una de sus caras (interna o externa en el cilindro).

Tras esto, tomaremos 15 medidas de cada y haremos la media y descartaremos datos que sobresalgan para así calcular el momento de inercia con su respectiva incertidumbre y comparar con el teórico.

Parte 3

Toca ahora la parte más cansada (tomaremos 150 medidas en cada una de sus dos subpartes), que será verificar el Teorema de Steiner. Este teorema asocia el momento de inercia en un eje con la distancia del momento de inercia a otro eje paralelo mediante la conocida ecuación:

$$I' = I + m \cdot d^2$$

También sabiendo los datos teóricos:

Figura	Momento de Inercia (Kg*m ²)
Disco	$I = \frac{m \cdot R^2}{2}$
Barra	$I = \frac{m \cdot L^2}{12}$

Con la información que obtengamos, descartaremos posibles datos excéntricos, haremos sus medias de semiperíodos y haremos una representación gráfica de I frente a d^2 en la que, mediante regresión lineal, encontraremos el valor de la masa, m y el momento de inercial respecto a su centro de masas, I .

4. Datos y Análisis de Datos

Mostraremos ahora, para cada sección, los datos obtenidos y los procesos realizados para obtener los resultados.

Parte 1

Para tener la constante del resorte, hemos tomado, para distintos ángulos, los datos registrados por el dinamómetro, con la precisión de este, así como la mencionada en el apartado 3 para los ángulos.

Antes, tomaremos la medida con la regla del radio del disco, que nos da $15,0 \pm 0,1 \text{ cm}$

Los datos en bruto, de diez medidas, serían:

Ángulo (°)	s(Ángulo) (°)	Fuerza(N)	s(Fuerza) (N)
90	1	0,17	0,01
105	1	0,22	0,01
120	1	0,25	0,01
135	1	0,3	0,01
150	1	0,35	0,01
165	1	0,39	0,01
180	1	0,43	0,01
195	1	0,47	0,01
210	1	0,52	0,01
225	1	0,55	0,01

Tabla con Ángulos y Fuerza.

Ahora tendremos que pasar, para procesar esta información, los ángulos a radianes y calcular el momento de la fuerza con las ecuaciones y mencionadas y su incertidumbre de la siguiente forma:

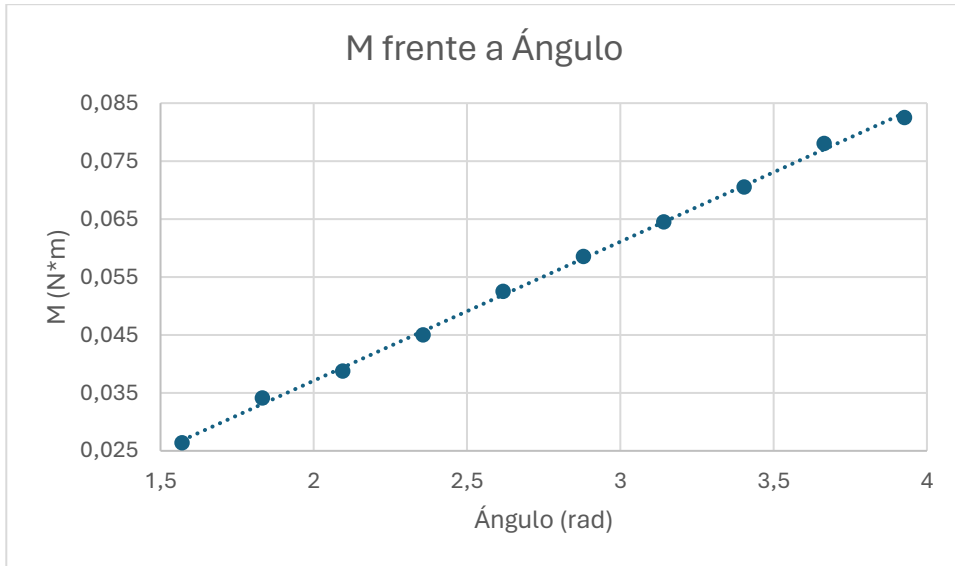
$$s(M) = \sqrt{r^2 \cdot s^2(F) + F^2 \cdot s^2(r)}$$

Por lo que, tendríamos de información procesada:

Ángulo (°)	s(Ángulo) (°)	Ángulo (rad)	s(Ángulo) (rad)	Fuerza(N)	s(Fuerza) (N)	M (N*m)	s(M) (N*m)	Radio (m)	s(Radio) (m)
90	1	1,57	0,02	0,17	0,01	0,0264	0,0016	0,155	0,0005
105	1	1,83	0,02	0,22	0,01	0,0341	0,0016	0,155	0,0005
120	1	2,09	0,02	0,25	0,01	0,0388	0,0016	0,155	0,0005
135	1	2,36	0,02	0,3	0,01	0,0450	0,0015	0,15	0,0005
150	1	2,62	0,02	0,35	0,01	0,0525	0,0015	0,15	0,0005
165	1	2,88	0,02	0,39	0,01	0,0585	0,0015	0,15	0,0005
180	1	3,14	0,02	0,43	0,01	0,0645	0,0015	0,15	0,0005
195	1	3,40	0,02	0,47	0,01	0,0705	0,0015	0,15	0,0005
210	1	3,67	0,02	0,52	0,01	0,0780	0,0015	0,15	0,0005
225	1	3,93	0,02	0,55	0,01	0,0825	0,0015	0,15	0,0005

Tabla con ángulos, fuerza, radio y Momento.

Si lo representamos gráficamente, el momento frente al ángulo, obtenemos:



Gráfica del Momento frente al Ángulo.

Cuya pendiente equivale a la constante del muelle, que, mediante regresión lineal podemos establecer como:

$$D = 0,02031 \pm 0,00033 \frac{N \cdot m}{rad}$$

Ya que hemos procesado hasta obtener:

b	s	s(b)	r
0,02031	0,00293	0,00033	0,99872

Regresión lineal aplicada.

Siendo b la pendiente de la recta, s(b) su incertidumbre y r la constante de regresión lineal asociada.

Parte 2

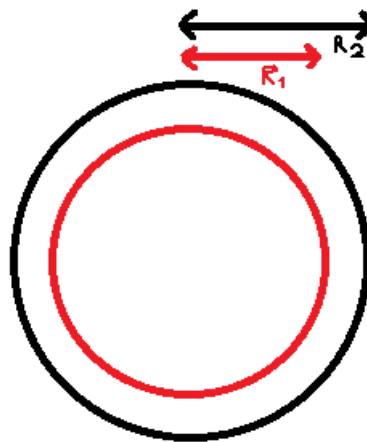
Toca calcular el momento de inercia de los dos objetos, iremos uno por uno, pero aplicando el mismo procedimiento.

Cilindro Hueco

Con este objeto, cabe destacar que alterará los resultados al tener una especie de tornillo de agarre de dimensión considerable en su eje, pero extendido de forma semirregular más allá de este. Mencionado esto, procedemos a medir su masa y dimensiones.

Con la balanza, obtenemos que su peso sería:

$$m = 0,34983 \pm 0,00001 \text{ Kg}$$



Y sus dos radios serían, medidos con regla y su incertidumbre milimétrica:

$$R_1 = (4,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$R_2 = (5,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Con esto, resulta sencillo medir el valor teórico de su Momento de Inercia, dado por la fórmula mencionada en el apartado 3, obtendríamos:

$$I = \frac{m}{2} \cdot (R_1^2 + R_2^2) = 8,070 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I) = \sqrt{(R_1 \cdot m)^2 \cdot s^2(R_1) + (R_2 \cdot m)^2 \cdot s^2(R_2) + \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}\right)^2 \cdot s^2(m)} = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Ósea

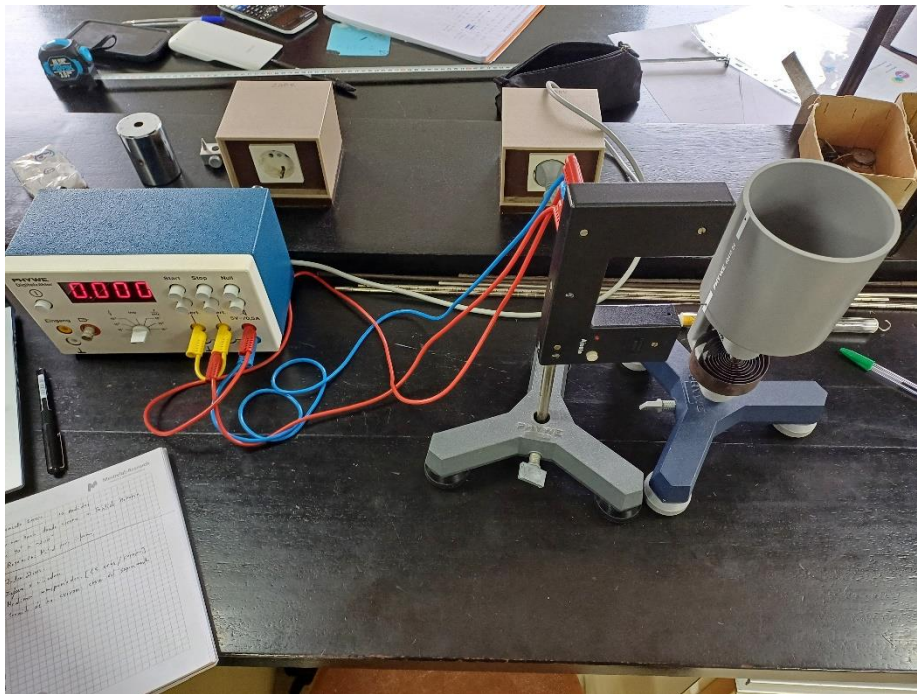
$$I = (8,070 \pm 0,238) \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Toca en este momento buscarlo mediante el procedimiento experimental.

T/2 (s)	s(T/2) (s)
0,614	0,001
0,614	0,001

0,614	0,001
0,614	0,001
0,613	0,001
0,612	0,001
0,614	0,001
0,613	0,001
0,614	0,001
0,612	0,001
0,612	0,001
0,613	0,001
0,612	0,001
0,613	0,001
0,613	0,001

Semiperíodos en cilindro hueco en rotación.



Procedimiento experimental con el cilindro hueco.

Y calculando la media aritmética, así como su incertidumbre combinada (en este caso no hay “datos malos” que eliminar, esto se ha visto con el protocolo visto en clase, pero en la parte 3 sí entrará en uso y ahí se explicará lo hecho).

$$T_{1/2} = 0,613 \pm 0,001 \text{ s}$$

Calculando el momento de inercia con los datos del apartado anterior:

$$I = D \cdot \frac{T_{1/2}^2}{\pi^2} = 7,735 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I) = \sqrt{\left(\frac{T_{1/2}}{\pi}\right)^4 \cdot s^2(D) + \left(\frac{2 \cdot D \cdot T_{1/2}}{\pi^2}\right)^2 \cdot s^2(T_{1/2})} = 1,27 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Finalmente:

$$I = (7,735 \pm 0,127) \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Esfera

Mencionamos también la presencia de un tornillo con masa en el eje, que podría afectar a la medida, pero lo obviaremos. Medimos la masa de la esfera:

$$m = 0,66072 \pm 0,00001 \text{ Kg}$$



Pesando la esfera sobre recipiente de plástico (tarado).

Y su radio ayudándonos de las tablas de madera:

$$R = (6,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Entonces resulta sencillo calcular su valor teórico estimado, así como su incertidumbre:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 = 1,260 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I) = \sqrt{\left(\frac{2}{5} \cdot R^2\right)^2 \cdot s^2(m) + \left(\frac{4}{5} \cdot m \cdot R\right)^2 \cdot s^2(R)} = 3,65 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Determinamos teóricamente:

$$I = (1,260 \pm 0,037) \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Pero experimentalmente, tenemos que utilizar la información obtenida en laboratorio, esta es:

T/2 (s)	s(T/2) (s)
0,77	0,001

0,77	0,001
0,77	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001
0,769	0,001

Semiperíodos en esfera sólida en rotación.

Aquí, igual que con el cilindro, haríamos la media y descartaríamos datos, pero tras hacer uso de las reglas del protocolo, vemos que no hay dato que descartar. Quedando así la media de semiperíodo y su incertidumbre combinada como:

$$T_{1/2} = 0,769 \pm 0,001 \text{ s}$$

Que, utilizado en la fórmula, se vería tal que:

$$I = D \cdot \frac{T_{1/2}^2}{\pi^2} = 1,217 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I) = \sqrt{\left(\frac{T_{1/2}}{\pi}\right)^4 \cdot s^2(D) + \left(\frac{2 \cdot D \cdot T_{1/2}}{\pi^2}\right)^2 \cdot s^2(T_{1/2})} = 1,98 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

De forma plena, tendríamos como resultado experimental lo siguiente,

$$I = (1,217 \pm 0,020) \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Parte 3

Tras ello, nos adentramos en la última parte, la verificación del Teorema de Steiner, respecto a la información extraída resulta la más extensa, y la dividiremos a su vez en dos partes: barra y disco, que sentirán sus debidas transformaciones en las partes teórica y experimental a las que procedemos. Que, seguirán idéntico tratamiento hasta la obtención de resultados.

Barra

Medimos la masa de la barra que resulta ser

$$m = 0,1440 \pm 0,0001 \text{ Kg}$$

Y su longitud (l) es de 66 cm medidos con regla, dividida en segmentos (la barra) de 1 cm cada uno. Despreciando el grosor y suponiendo una barra perfecta, su momento de inercia debería darnos:

$$I = \frac{m \cdot l^2}{12} = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I) = \sqrt{\left(\frac{l^2}{12}\right)^2 \cdot s^2(m) + \left(\frac{l}{6} \cdot m\right)^2 \cdot s^2(l)} = 3,96 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo que debería ser:

$$I = (5,23 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Y toca ahora buscar la confirmación mediante nuestros datos obtenidos en laboratorio.

Los datos tomados tal cual, en base a la distancia del centro de masas (l) han sido:

l (m)	s(l) (m)	T/2 (s)	s(T/2) (s)
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,600	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,600	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,602	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,601	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,600	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,600	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,600	0,001
0,00E+00	1,00E-03	1,600	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,607	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,605	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,604	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,604	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,603	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,603	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,603	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,602	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,602	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,602	0,001
1,00E-02	1,00E-03	1,602	0,001

4,00E-02	1,00E-03	1,625	0,001
4,00E-02	1,00E-03	1,624	0,001
4,00E-02	1,00E-03	1,625	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,654	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,658	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,654	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,655	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,655	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,654	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,655	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,656	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,656	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,654	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,654	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,656	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,655	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,656	0,001
5,00E-02	1,00E-03	1,655	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,676	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,679	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,674	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,676	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,677	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,675	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,675	0,001
6,00E-02	1,00E-03	1,676	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,702	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,702	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,702	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,701	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,701	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,699	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,700	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,698	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,695	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,698	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,696	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,697	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,695	0,001

7,00E-02	1,00E-03	1,695	0,001
7,00E-02	1,00E-03	1,696	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,741	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,750	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,748	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,747	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,745	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,746	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,745	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,746	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,745	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,746	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,745	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,746	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,745	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,747	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,745	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,742	0,001
8,00E-02	1,00E-03	1,745	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,764	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,769	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,768	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,765	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,767	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,763	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,762	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,759	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,754	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,760	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,764	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,776	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,767	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,770	0,001
9,00E-02	1,00E-03	1,770	0,001

Semiperíodos y distancia al centro de masas en la barra en rotación.

Ahora seguiremos el ya mencionado protocolo para descartar valores y hacer una buena media en cada una de las distancias (l).

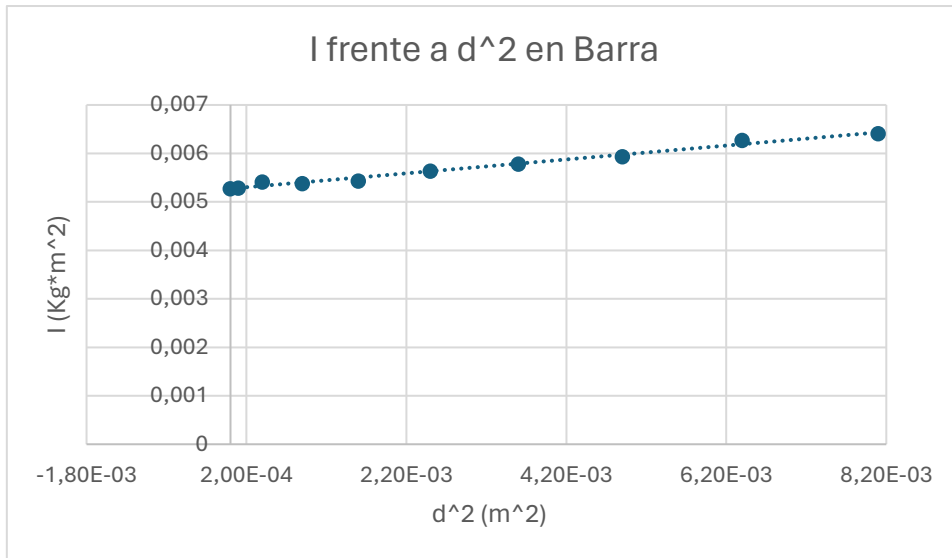
Lo primero será hacer la media y calcular su desviación típica, luego en un intervalo de la media más y menos su incertidumbre por el factor de cobertura k, al cual le daremos valor 2 para cubrir el 95%, descartaremos los valores de la lista que no estén en tal. Con los valores restantes, calculamos la media e incertidumbre de nuevo y esta vez con la incertidumbre combinada; también debemos mostrar los grados de libertad al final. Aplicamos lo dicho y nos queda la siguiente tabla (en la que las celdas en rojo representan valores eliminados):

l (m)	0,00E+00	1,00E-02	2,00E-02	3,00E-02	4,00E-02	5,00E-02	6,00E-02	7,00E-02	8,00E-02	9,00E-02
T/2 (s)	1,601	1,607	1,623	1,623	1,626	1,654	1,677	1,702	1,741	1,764

	1,601	1,605	1,623	1,623	1,626	1,658	1,676	1,702	1,750	1,769
	1,601	1,604	1,621	1,623	1,626	1,654	1,677	1,702	1,748	1,768
	1,601	1,604	1,622	1,622	1,626	1,655	1,677	1,701	1,747	1,765
	1,601	1,603	1,622	1,615	1,626	1,655	1,677	1,701	1,745	1,767
	1,601	1,603	1,622	1,617	1,626	1,654	1,679	1,699	1,746	1,763
	1,601	1,603	1,622	1,616	1,625	1,655	1,674	1,700	1,745	1,762
	1,601	1,602	1,622	1,616	1,625	1,656	1,676	1,698	1,746	1,759
	1,600	1,602	1,622	1,616	1,625	1,656	1,677	1,695	1,745	1,754
	1,600	1,602	1,621	1,615	1,626	1,654	1,677	1,698	1,746	1,760
	1,602	1,602	1,623	1,616	1,626	1,654	1,677	1,696	1,745	1,764
	1,601	1,600	1,622	1,616	1,625	1,656	1,677	1,697	1,747	1,776
	1,600	1,602	1,622	1,610	1,625	1,655	1,675	1,695	1,745	1,767
	1,600	1,602	1,622	1,614	1,624	1,656	1,675	1,695	1,742	1,770
	1,600	1,601	1,622	1,615	1,625	1,655	1,676	1,696	1,745	1,770
Medi a (s)	1,601	1,603	1,622	1,617	1,625	1,655	1,676	1,698	1,746	1,765
sa (s)	0,0006 54654	0,001 71131	0,0005 97614	0,0038 54496	0,0008 01784	0,0011 33893	0,0012 8174	0,0027 64572	0,0022 20039	0,005 3519
Inter valo de confi anza	1,600 1,602	1,600 1,606	1,621 1,623	1,609 1,625	1,623 1,627	1,653 1,657	1,673 1,679	1,692 1,704	1,742 1,750	1,754 1,776
Medi a (s)	1,601	1,603	1,622	1,617	1,625	1,655	1,676	1,698	1,746	1,765
sa (s)	0,0006 54654	0,001 38675	0,0005 97614	0,0038 54496	0,0008 01784	0,0008 3205	0,0012 8174	0,0027 64572	0,0018 39732	0,005 3519
sa (Med ia) (s)	0,0001 69031	0,000 37062	0,0001 54303	0,0009 95227	0,0002 0702	0,0002 22375	0,0003 30944	0,0007 13809	0,0004 91689	0,001 38186
sc (Med ia) (s)	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002
Φ	14	13	14	14	14	13	14	14	13	14

Semiperíodos y distancia al centro de masas en la barra en rotación.

Con esos nuevos valores e incertidumbres (mostrados en verde), hacemos su representación gráfica de I frente a d^2 , para que así, la pendiente de tal recta sea la masa del objeto y su ordenada en el origen sea el momento de inercia respecto a su eje de masa central (el calculado teóricamente). Como cumple la ecuación de recta $y = a + b \cdot x$, en nuestro caso a será ese dicho momento de inercia y b la masa.



Gráfica de I frente a d^2 en la barra metálica.

Y haciendo la conocida regresión lineal, obtenemos lo siguiente:

a	b	s	s(a)	s(b)	r
5,27E-03	1,43E-01	5,175E-05	2,39E-05	4,31E-03	9,93E-01

En la que se ha utilizado (como paso en la regresión lineal entres sus muchos cálculos):

$$s(d^2) = 2 \cdot d \cdot s(d)$$

Por lo que, de forma práctica obtenemos de resultados para una regresión lineal de constante $r=0,993$:

$$I = (5,27 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

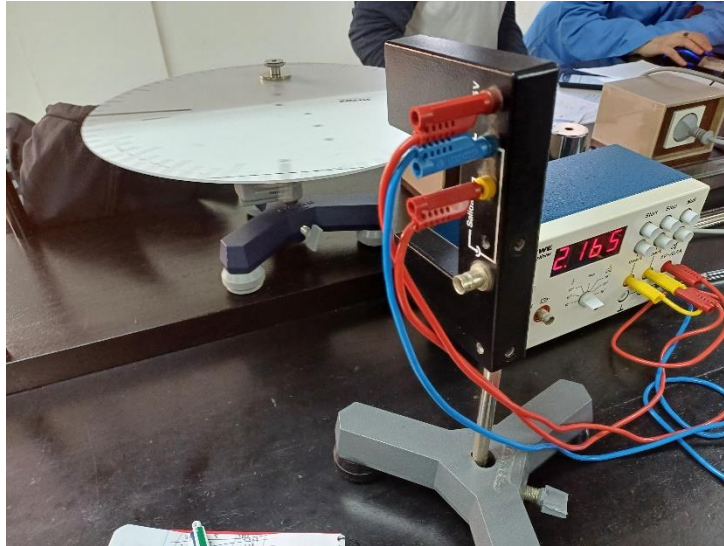
$$m = 0,143 \pm 0,004 \text{ Kg}$$

Disco

Utilizando la balanza, calculamos la masa del disco.

$$m = 0,38230 \pm 0,00001 \text{ Kg}$$

Y sus medidas son de un radio de $R = 0,150 \pm 0,001 \text{ m}$ y la división en 5 agujeros que se distribuyen en una misma recta radial desde el centro con una distancia entre ellos de 3 cm medidos con regla.



Procedimiento experimental con el Disco perforado.

Para calcular sus valores teóricos que evaluaremos más tarde, utilizamos su fórmula.

$$I = \frac{m \cdot R^2}{2} = 2,34 \cdot 10^{-2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I) = \sqrt{\left(\frac{R^2}{2}\right)^2 \cdot s^2(m) + (R \cdot m)^2 \cdot s^2(R)} = 1,34 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Que teóricamente debería ser:

$$I = (2,34 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Con esto, repetiremos lo hecho en la barra y mostraremos los datos obtenidos, siendo estos menos ya que tomamos quince medidas por cada uno de sus cinco agujeros.

Medida	l (m)	s(l) (m)	T/2 (s)	s(T/2) (s)
1	0	1,00E-03	1,455	0,001
2	0	1,00E-03	1,454	0,001
3	0	1,00E-03	1,454	0,001
4	0	1,00E-03	1,453	0,001
5	0	1,00E-03	1,453	0,001
6	0	1,00E-03	1,453	0,001
7	0	1,00E-03	1,452	0,001
8	0	1,00E-03	1,452	0,001
9	0	1,00E-03	1,451	0,001
10	0	1,00E-03	1,451	0,001
11	0	1,00E-03	1,450	0,001
12	0	1,00E-03	1,451	0,001
13	0	1,00E-03	1,451	0,001
14	0	1,00E-03	1,450	0,001

15	0	1,00E-03	1,450	0,001
16	3,00E-02	1,00E-03	1,560	0,001
17	3,00E-02	1,00E-03	1,559	0,001
18	3,00E-02	1,00E-03	1,558	0,001
19	3,00E-02	1,00E-03	1,555	0,001
20	3,00E-02	1,00E-03	1,550	0,001
21	3,00E-02	1,00E-03	1,553	0,001
22	3,00E-02	1,00E-03	1,554	0,001
23	3,00E-02	1,00E-03	1,553	0,001
24	3,00E-02	1,00E-03	1,552	0,001
25	3,00E-02	1,00E-03	1,552	0,001
26	3,00E-02	1,00E-03	1,553	0,001
27	3,00E-02	1,00E-03	1,555	0,001
28	3,00E-02	1,00E-03	1,554	0,001
29	3,00E-02	1,00E-03	1,552	0,001
30	3,00E-02	1,00E-03	1,551	0,001
31	6,00E-02	1,00E-03	1,859	0,001
32	6,00E-02	1,00E-03	1,861	0,001
33	6,00E-02	1,00E-03	1,878	0,001
34	6,00E-02	1,00E-03	1,865	0,001
35	6,00E-02	1,00E-03	1,861	0,001
36	6,00E-02	1,00E-03	1,869	0,001
37	6,00E-02	1,00E-03	1,866	0,001
38	6,00E-02	1,00E-03	1,858	0,001
39	6,00E-02	1,00E-03	1,866	0,001
40	6,00E-02	1,00E-03	1,863	0,001
41	6,00E-02	1,00E-03	1,866	0,001
42	6,00E-02	1,00E-03	1,868	0,001
43	6,00E-02	1,00E-03	1,873	0,001
44	6,00E-02	1,00E-03	1,869	0,001
45	6,00E-02	1,00E-03	1,864	0,001
46	9,00E-02	1,00E-03	2,165	0,001
47	9,00E-02	1,00E-03	2,184	0,001
48	9,00E-02	1,00E-03	2,164	0,001
49	9,00E-02	1,00E-03	2,175	0,001
50	9,00E-02	1,00E-03	2,174	0,001
51	9,00E-02	1,00E-03	2,173	0,001
52	9,00E-02	1,00E-03	2,170	0,001
53	9,00E-02	1,00E-03	2,160	0,001
54	9,00E-02	1,00E-03	2,148	0,001
55	9,00E-02	1,00E-03	2,166	0,001
56	9,00E-02	1,00E-03	2,143	0,001
57	9,00E-02	1,00E-03	2,174	0,001
58	9,00E-02	1,00E-03	2,165	0,001
59	9,00E-02	1,00E-03	2,183	0,001
60	9,00E-02	1,00E-03	2,170	0,001

61	1,20E-01	1,00E-03	2,327	0,001
62	1,20E-01	1,00E-03	2,341	0,001
63	1,20E-01	1,00E-03	2,363	0,001
64	1,20E-01	1,00E-03	2,361	0,001
65	1,20E-01	1,00E-03	2,352	0,001
66	1,20E-01	1,00E-03	2,357	0,001
67	1,20E-01	1,00E-03	2,358	0,001
68	1,20E-01	1,00E-03	2,352	0,001
69	1,20E-01	1,00E-03	2,345	0,001
70	1,20E-01	1,00E-03	2,350	0,001
71	1,20E-01	1,00E-03	2,350	0,001
72	1,20E-01	1,00E-03	2,352	0,001
73	1,20E-01	1,00E-03	2,342	0,001
74	1,20E-01	1,00E-03	2,353	0,001
75	1,20E-01	1,00E-03	2,352	0,001

Semiperíodos y distancia al centro de masas en el disco en rotación

Toca ahora repetir el proceso de exclusión de datos excéntricos y calcular un valor medio con su incertidumbre combinada por cada marca de distancia respecto al centro.

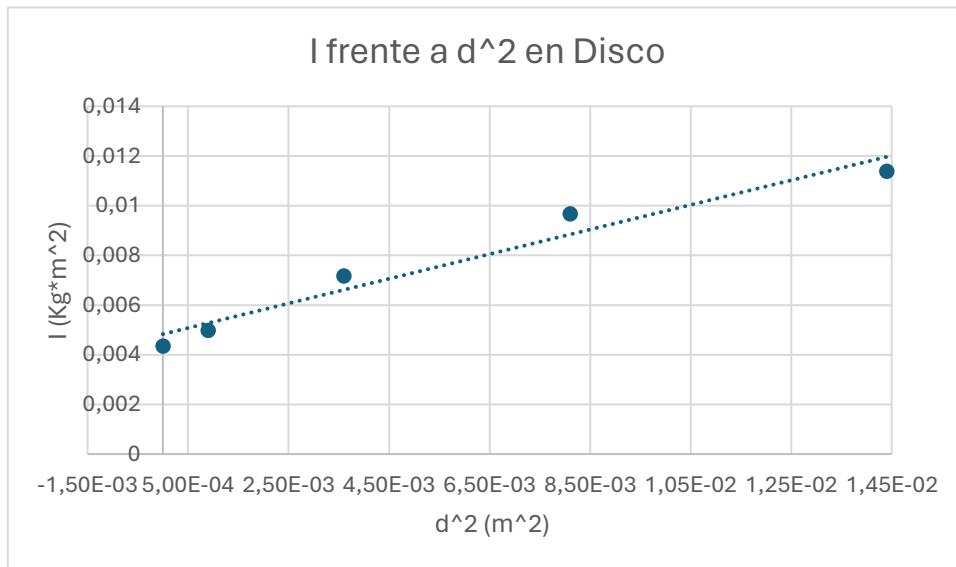
l (m)	0,00E+00	3,00E-02	6,00E-02	9,00E-02	1,20E-01
T/2 (s)	1,455	1,560	1,859	2,165	2,327
	1,454	1,559	1,861	2,184	2,341
	1,454	1,558	1,878	2,164	2,363
	1,453	1,555	1,865	2,175	2,361
	1,453	1,550	1,861	2,174	2,352
	1,453	1,553	1,869	2,173	2,357
	1,452	1,554	1,866	2,170	2,358
	1,452	1,553	1,858	2,160	2,352
	1,451	1,552	1,866	2,148	2,345
	1,451	1,552	1,863	2,166	2,350
	1,450	1,553	1,866	2,143	2,350
	1,451	1,555	1,868	2,174	2,352
	1,451	1,554	1,873	2,165	2,342
	1,450	1,552	1,869	2,183	2,353
1,450	1,551	1,864	2,17	2,352	
Media (s)	1,452	1,554	1,866	2,168	2,350
sa (s)	0,001603567	0,00291548	0,005291503	0,011218607	0,008972179
Intervalo de confianza	1,449	1,548	1,855	2,146	2,332
	1,455	1,560	1,877	2,190	2,368
Media (s)	1,452	1,554	1,866	2,168	2,352
sa (s)	0,001603567	0,00291548	0,005291503	0,011218607	0,006480741
sa (Media) (s)	0,000414039	0,00075277	0,00136626	0,002896632	0,001732051
sc (Media) (s)	0,001	0,001	0,002	0,003	0,002

Φ	14	14	14	14	13
--------	----	----	----	----	----

Semiperíodos y distancia al centro de masas en el disco en rotación.

Aquí también se uso k con valor 2.

Gráficamente se representa al igual que antes I frente a d^2 y después se calculan los términos mediante regresión lineal.



Gráfica de I frente a d^2 en el disco perforado.

Al ser menos valores, es notable una menor exactitud respecto al caso de la barra.

a	b	s	s(a)	s(b)	r
4,83E-03	4,96E-01	0,0007448	4,75E-04	6,27E-02	9,77E-01

Sólo con el valor de la constante de regresión lineal, $r=0,977$ ya podemos afirmar nuestra reciente deducción. Los datos obtenidos han sido:

$$I = (4,83 \pm 0,48) \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m = 0,496 \pm 0,063 \text{ Kg}$$

5. Conclusión

Los resultados generales recopilados serían:

·Parte 1. Constante del muelle:

$$D = 0,02031 \pm 0,00033 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

·Parte 2. Momento Inercia:

Figura	Masa (Kg)	Momento de Inercia (Kg*m^2)	
		Teórico	Experimental
Cilindro Hueco	$0,34983 \pm 0,00001$	$(8,070 \pm 0,238) \cdot 10^{-4}$	$(7,735 \pm 0,127) \cdot 10^{-4}$
Esfera Rígida	$0,66072 \pm 0,00001$	$(1,260 \pm 0,037) \cdot 10^{-3}$	$(1,217 \pm 0,020) \cdot 10^{-4}$

Podemos ver que en ambos casos hay una región donde valor teórico y experimental podrían ser igual, por ello podemos determinarlos como buenos resultados ya que podrían ser perfectamente realistas y aceptables.

.Parte 3. Teorema de Steiner:

Figura	Masa (Kg)		Momento de Inercia (Kg*m^2)	
	Teórica	Experimental	Teórico	Experimental
Barra	$0,143 \pm 0,004$	$0,1440 \pm 0,0001$	$(5,23 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}$	$(5,27 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$
Disco	$0,496 \pm 0,063$	$0,38230 \pm 0,00001$	$(2,34 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	$(4,83 \pm 0,48) \cdot 10^{-3}$

En este caso, pese a que debemos tener muy en cuenta las constantes de regresión lineal, que son 0,993 y 0,977 respectivamente. Para el caso de la barra, que es el que más gozaba de cantidad de muestras, los datos son factibles y perfectamente aceptables con una constante de regresión lineal aceptable. Sin embargo, para el disco, no solo la constante es muy mala, sino que ni la masa ni el momento de inercia se adecuan a los valores teóricos de momento de inercia y experimentales de masa. Esto, seguramente se deba a un error en los cálculos o en la hoja de cálculo, aún así, he estado revisando y no encuentro ningún fallo aparente. Por ello debo mencionar que los valores de la parte 3 del disco no se deben tener en cuenta, de momento, al menos hasta previa revisión. Por eso es que, es mi deber publicar mi sección de la hoja de cálculo asociada a tal, en bruto (y semisucia) para poder encontrar el lector algún posible error:

l (m)	s(l) (m)	T/2 (s)	s(T/2) (s)	l^2 (m^2)	s(l^2) (m^2)	I (Kg*m^2)	s(I) (Kg*m^2)
0,00E+00	1,00E-03	1,452	0,001	0,00E+00	0,00E+00	0,00433818	6,98015E-05
3,00E-02	1,00E-03	1,554	0,001	9,00E-04	6,00E-05	0,00496909	7,99155E-05
6,00E-02	1,00E-03	1,866	0,002	3,60E-03	1,20E-04	0,0071647	0,000115879
9,00E-02	1,00E-03	2,168	0,003	8,10E-03	1,80E-04	0,00967148	0,000157337
1,20E-01	1,00E-03	2,352	0,002	1,44E-02	2,40E-04	0,0113828	0,000183501
	x	y	x^2	y^2	x*y	(y-a-b*x)^2	
	0,00E+00	4,34E-03	0,00E+00	1,88E-05	0,00E+00	2,40E-07	
	9,00E-04	4,97E-03	8,10E-07	2,47E-05	4,47E-06	9,31E-08	

	3,60E-03	7,16E-03	1,30E-05	5,13E-05	2,58E-05	3,05E-07
	8,10E-03	9,67E-03	6,56E-05	9,35E-05	7,83E-05	6,85E-07
	1,44E-02	1,14E-02	2,07E-04	1,30E-04	1,64E-04	3,42E-07
Σ	2,70E-02	3,75E-02	2,87E-04	3,18E-04	2,73E-04	1,66E-06
a	b	s	s(a)	s(b)	r	
4,83E-03	4,96E-01	0,0007448	4,75E-04	6,27E-02	9,77E-01	

Quitando esto, visualmente podemos ver en las gráficas que el teorema de Steiner sí se cumple. Dato que, además, podemos comprobar numéricamente con la información que aporta el experimento de la barra.

6· Bibliografía


- *Wikipedia contributors. (2024a, marzo 11). Moment of inertia. Wikipedia.*
https://en.wikipedia.org/wiki/Moment_of_inertia

20/03/24

NO MENTO DE INERCIA

1

Teoría

Un bodies para el que como: 
 Medida angulos $\geq 90^\circ$ ($< 90^\circ$ no es tan buena, mucho ruido) $\theta < 250^\circ$

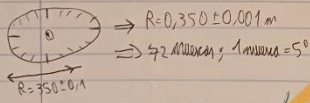
Obj. caracterización



10 medidas

Brackets

- Sentido horario en cámara \odot
- El momento de inercia, no aplica fuerzas, marca entre 0,01 N y 0,02 N



~~20/03/2024~~

1 medida cada 3 minutos; 15°

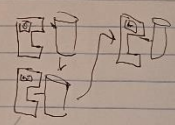
Medida	Angulo (°)	Fuerza (N)
1	90°	0,17 ± 0,01
2	105°	0,22
3	120°	0,25
4	135°	0,3
5	150°	0,35
6	165°	0,39
7	180°	0,43
8	195°	0,47
9	210°	0,52
10	225°	0,55

radio extra: 35,5 cm
 r extra
 r extra

2

Momento de inercia de los cuerpos

Medir 15 comparador, sentido horario



Medición de inercia

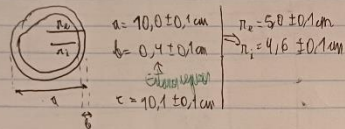
brackets

~~20/03/2024~~

Objeto 1: Cilindro hueco de paredes no despreciables



Mass: $0,34983 \pm 0,00001$ Kg



es tamaño del sistema man y objeto para med.

Objeto 2:



Mass: $0,66072 \pm 0,00001$ Kg

$d = 13,8 \pm 0,1$ cm $\Rightarrow r = 6,9 \pm 0,1$ cm

~~20/03/2024~~

Cilindros huecos

Cilindros 2

Medida	Tiempo Simples (s)	Tiempo Simple (s)
1	0,614 ± 0,001	0,770
2	0,614	0,770
3	0,614	0,770
4	0,614	0,769
5	0,613	0,769
6	0,612	0,769
7	0,614	0,769
8	0,613	0,769
9	0,614	0,769
10	0,612	0,769
11	0,612	0,769
12	0,613	0,769
13	0,612	0,769
14	0,613	0,769
15	0,613	0,769

~~20/03/2024~~

3. \downarrow 5 medallas \downarrow 10 medallas

Barras 10 medallas y 15 medallas por cada lado.

$M = 0,1440 \pm 0,0001 \text{ Kg}$

6 cm

Medalla	Segmento	Samplificado (g)
1	0	1,601
2	0	1,601
3	0	1,601
4	0	1,601
5	0	1,601
6	0	1,601
7	0	1,601
8	0	1,600
9	0	1,600
10	0	1,600
11	0	1,602
12	0	1,601
13	0	1,600
14	0	1,600
15	0	1,600
16	4	1,607
17	1	1,605
18	1	1,604
19	1	1,604
20	1	1,603
21	1	1,603

20-03-2021

22	1	1,603
23	1	1,602
24	1	1,602
25	1	1,602
26	1	1,602
27	1	1,600
28	1	1,602
29	1	1,602
30	1	1,601
31	2	1,623
32	2	1,623
33	2	1,621
34	2	1,622
35	2	1,622
36	2	1,622
37	2	1,622
38	2	1,622
39	2	1,621
40	2	1,623
41	2	1,622
42	2	1,622
43	2	1,622
44	2	1,622
45	3	1,622 1,623
46	3	1,622 1,623
47	3	1,622 1,623
48	3	1,622 1,622
49	3	1,615
50	3	1,617
51	3	1,616
52	3	1,616

20-03-2021

\rightarrow Añadir 1,622 extra

1,622	1,623
1,622	1,623
1,622	1,623
1,622	1,623

53	3	1,616
54	3	1,616
55	3	1,615
56	3	1,616
57	3	1,616
58	3	1,616
59	3	1,615
60	3	1,615
61	4	1,626
62	4	1,626
63	4	1,626
64	4	1,626
65	4	1,626
66	4	1,626
67	4	1,625
68	4	1,625
69	4	1,625
70	4	1,626
71	4	1,626
72	4	1,626
73	4	1,625
74	4	1,625
75	4	1,624
76	5	1,625
77	5	1,654
78	5	1,656
79	5	1,654
80	5	1,655
81	5	1,655
82	5	1,654
83	5	1,655

20-03-2021

84	5	1,656
85	5	1,654
86	5	1,654
87	5	1,656
88	5	1,655
89	5	1,656
90	5	1,655
91	6	1,677
92	6	1,676
93	6	1,677
94	6	1,677
95	6	1,677
96	6	1,679
97	6	1,674
98	6	1,676
99	6	1,677
100	6	1,677
101	6	1,677
102	6	1,677
103	6	1,675
104	6	1,675
105	6	1,676
106	7	1,700
107	7	1,702
108	7	1,702
109	7	1,702
110	7	1,701
111	7	1,699
112	7	1,700
113	7	1,699
114	7	1,699
115	7	1,699
116	7	1,696
117	7	1,697
118	7	1,695

20-03-2021

1,702	1,702
1,702	1,702
1,702	1,702

Modulus	Segmento	Semiparedo (n)
1	0	1,455
2	0	1,454
3	0	1,454
4	0	1,453
5	0	1,453
6	0	1,453
7	0	1,452
8	0	1,452
9	0	1,451
10	0	1,451
11	0	1,450
12	0	1,451
13	0	1,450
14	0	1,450
15	0	1,450
16	1	1,560
17	1	1,559
18	1	1,558
19	1	1,558
20	1	1,550
21	1	1,553
22	1	1,554
23	1	1,553
24	1	1,552
25	1	1,552
26	1	1,553
27	1	1,555
28	1	1,554
29	1	1,552
30	1	1,551

$M = 0,78230 \pm 0,0001 \text{ Kg}$
 $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$
 Date: 20-03-2024

31	2	1,867
32	2	1,878
33	2	1,863
34	2	1,861
35	2	1,863
36	2	1,866
37	2	1,858
38	2	1,866
39	2	1,863
40	2	1,866
41	2	1,866
42	2	1,873
43	2	1,867
44	2	1,864
45	2	2,165
46	3	2,164
47	3	2,164
48	3	2,175
49	3	2,174
50	3	2,173
51	3	2,170
52	3	2,160
53	3	2,166
54	3	2,166
55	3	2,143
56	3	2,174
57	3	2,165
58	3	2,163
59	3	2,170
60	4	2,327
61	4	2,341
62	4	2,363
63	4	2,361
64	4	2,357
65	4	2,357
66	4	2,358
67	4	2,352
68	4	2,345

Date: 20-03-2024